Las transformaciones unitarias nos permiten cambiar de sistema de referencia (en el espacio $\mathcal{H}$).

Un operador unitario importante es el de evolución temporal para $H$ indep de $t$

$$\hat{U}(t,t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}$$

## 8.2. Los esquemas de Schrödinger y Heisenberg

- El en formalismo desarrollado anteriormente asignamos operadores independientes del tiempo a observables (posición, momento, energía cinética).
- La dinámica del sistema esta totalmente contenida en el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ (usaremos $|\psi_S(t)\rangle$ en esta sección) que obtenemos por medio de la Ec. de Schrödinger.
- A esta manera de tratar el problema se le conoce como esquema de Schrödinger.
- Las prediccíones de la M.C. se expresan en términos de productos escalares entre bras y kets. Estas cantidades no cambian si aplicamos transformaciones unitarias.
- Podemos escoger $U$ de tal modo que $|\psi_S(t)\rangle$ se transforme en un ket constante (independiente del tiempo). De ese modo encontramos el *Esquema de Heisenberg.*
- Para evitar confusión usamos $S$ para kets en esquema de Shcrödinger y $H$ en esquema de Heisenberg. Normalmente usamos $S$ pero no lo escribimos.
- Podemos expresar

  $$|\psi_S(t)\rangle = U(t,t_0)\,|\psi_S(t_0)\rangle\,,$$

  donde $U(t,t_0)$ es el operador de evolución.
- Como este operador es unitario podemos aplicar la transformación inversa para obtener un vector constante

  $$|\psi_H\rangle = U^\dagger(t,t_0)\,|\psi_S(t)\rangle = U^\dagger(t,t_0)U(t,t_0)\,|\psi_S(t_0)\rangle = |\psi_S(t_0)\rangle$$

Los operadores se transforman de acuerdo a

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}^\dagger(t,t_0)\,\hat{A}_S\,\hat{U}(t,t_0)$$

Calculamos el valor esperado así

$$\langle A\rangle(t) = \langle\psi_S(t)|\hat{A}_S|\psi_S(t)\rangle = \overbrace{\langle\psi_S(t_0)|\hat{U}^\dagger(t)}^{\text{Schrödinger}}\underbrace{\hat{A}_S\hat{U}(t)}_{\text{Heisenberg}}\overbrace{|\psi_S(t_0)\rangle}^{\text{Schrödinger}}$$

$$= \langle\psi_H|A_H(t)|\psi_H\rangle$$

Podemos obtener una ecuación de evol. para $A_H(t)$

When $A_S(t)$ is arbitrary, let us calculate the evolution of the operator $A_H(t)$. Using relation (4) of Complement $\mathrm{F_{III}}$, as well as its adjoint, we obtain: $\rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U = HU$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t,t_0) H_S(t) A_S(t) U(t,t_0) + U^\dagger(t,t_0) \frac{\mathrm{d}A_S(t)}{\mathrm{d}t} U(t,t_0)$$
$$+ \frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t,t_0) A_S(t) H_S(t) U(t,t_0) \quad (6)$$

In the first and last terms of this expression, let us insert between $A_S$ and $H_S$ the product $U(t,t_0)U^\dagger(t,t_0)$, which is equal to the identity operator [formula (17) of Complement $\mathrm{F_{III}}$]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = -\frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t,t_0) H_S(t) U(t,t_0) U^\dagger(t,t_0) A_S(t) U(t,t_0)$$
$$+ U^\dagger(t,t_0) \frac{\mathrm{d}A_S(t)}{\mathrm{d}t} U(t,t_0)$$
$$+ \frac{1}{i\hbar} U^\dagger(t,t_0) A_S(t) U(t,t_0) U^\dagger(t,t_0) H_S(t) U(t,t_0) \quad (7)$$

According to definition (3), we finally obtain:

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_H(t) = [A_H(t), H_H(t)] + i\hbar \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_S(t) \right)_H \quad (8)$$

Se parece mucho a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H(t)]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$ pero esta nueva es más fuerte ¿Por qué?

**Constantes de movimiento** (Integral de mov).

- Una constante de movimiento es un observable que no depende explícitamente del tiempo y que conmuta con $H$, i.e. $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ y $[A, H] = 0$.
- En un sistema conservativo $H$ es una constante de mov.
- Al considerar esto en la Ec. 4 vemos que los valores promedio de este observable no cambian con el tiempo. $\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [A,H]\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle$
- Para una constante de movimiento $A$ podemos encontrar una base de e.V. comunes con $H$. Un e.V. de $A$ será también e.V. de $H$ y por tanto no cambiará con el tiempo. De este modo, un estado estacionario se mantendrá como eigenestado de $A$ y cuando midamos el observable $A$ de este sistema en este estado siempre obtendremos el mismo resultado. A los eigenvalores de $A$ en este caso $a_n$ se les llama *buen número cuántico*.

$$H |\phi_{n,p}\rangle = E_n |\phi_{n,p}\rangle$$
$$A |\phi_{n,p}\rangle = a_p |\phi_{n,p}\rangle$$

- La probabilidad de obtener el resultado $a_p$ no cambia pues

$$c_{n,p}(t) = c_{n,p}(t_0) e^{iE_n(t-t_0)/\hbar}$$

y

$$\mathcal{P}(a_p, t) = \sum_n |c_{n,p}(t)|^2 = \sum_n |c_{n,p}(t_0)|^2$$

Si $A_S$ es cte de mov, entonces $A_H$ tampoco depende de $t$ $A_H = U^\dagger A_S U = U^\dagger U A_S = A_S$ $([A,H]=0 \Rightarrow [A,U]=0)$